OPCIÓN A

1..- Determinar los valores de *a* y de *b* para que la función: $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x\le 0 \\ 2a+b\ sen\ x & si \quad x>0 \end{cases}$

sea derivable **[2'5 puntos]**

Para ser **derivable** tiene que ser **continua** y el valor de las **derivadas laterales** en el punto de discontinuidad**,** en este caso **x = 0** son iguales

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=e^{a\cdot 0}=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2a+b\ sen\ 0=2a+b.0=2a \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} a\ e^{ax} & si \quad x<0 \\ b\cos x & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & si \quad x<0 \\ b\cos x & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{0}{2}}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=b\cos 0=b.1=b \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

2.- Resolver las siguientes integrales :

$$a)\quad \int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx \quad (1'25\ puntos) \qquad b)\quad \int_0^{\pi} \frac{6\ sen\ x}{5-3\cos x}\,dx \quad (1'25\ puntos)$$

$$a)\quad I=\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx=\int \frac{5t^2+\sqrt{3}t}{t^4}\,dx=5\int \frac{t^2}{t^4}\,2t\ dt+\sqrt{3}\int \frac{t}{t^4}\,2t\ dt=10\int \frac{t^3}{t^4}\,dt+2\sqrt{3}\int \frac{t^2}{t^4}\,dt$$

$$x=t^2 \Rightarrow dx=2t\ dt$$

$$I=10\int \frac{dt}{t}+2\sqrt{3}\int \frac{dt}{t^2}=10\cdot \ln t+2\sqrt{3}\int t^{-2}dt=10\cdot \ln x^2+2\sqrt{3}\cdot \frac{1}{-2+1}t^{-2+1}=\ln\left(x^2\right)^{10}-2\sqrt{3}\ t^{-1}$$

$$I=\ln\left(x^2\right)^{10}-\frac{2\sqrt{3}}{t}=\ln x^{20}-\frac{2\sqrt{3}}{x^2}+K$$

$$b)\quad \int_0^{\pi} \frac{6\ sen\ x}{5-3\cos x}\,dx=6\int_2^8 \frac{\frac{dt}{3}}{t}=\frac{6}{3}\int_2^8 \frac{dt}{t}=2\cdot[\ln t]_2^8=2\cdot(\ln 8-\ln 2)=2\cdot \ln\frac{8}{2}=2\cdot \ln 4=\ln 4^2=\ln 16$$

$$5-3\cos x=t \Rightarrow -3\cdot(-sen\ x)\,dx=dt \Rightarrow sen\ x\ dx=\frac{dt}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\pi \Rightarrow t=5-3\cdot \cos\pi=5-3\cdot(-1)=8 \\ x=0 \Rightarrow t=5-3\cdot \cos 0=5-3=2 \end{cases}$$

3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores de ***m***. **(1,5 puntos)**
b) Resolverlo para ***m* = 2**. **(1 punto)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-2 & 1-m \\ 0 & m-2 & -m \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} m-2 & 1-m \\ m-2 & -m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m-2 & 1-m \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-(m-2)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow -(m-2)=0\Rightarrow m-2=0\Rightarrow m=2$$

$$\forall m\in\Re-\{2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Si\ m=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$b) Si\ m=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow z=1\Rightarrow x+y+3\cdot 1=2\Rightarrow x+y=-1\Rightarrow x=-1-y\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-1-\lambda\ ,\ \lambda\ ,1)$$

4.- Dados la recta $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x-2y+z=2 \end{cases}$ el punto ***P* (1 , 0 , 1)** exterior a ***r***,

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que contiene a ***r*** y ***P***. **(1,25 puntos)**
b) Hallar la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta ***s*** que pasa por ***P*** y es paralela a la recta ***r***. **(1,25 puntos)**

a) Del haz de planos generado por la recta **r**, buscaremos aquel que contiene al punto **P**

$$Haz\ de\ planos\ generado\ por\ r\Rightarrow x-2y+z+\lambda\,(-x-2y+z-2)=0\Rightarrow$$

$$Si\ contiene\ a\ P\Rightarrow 1-2\cdot 0+1+\lambda\,(-1-2\cdot 0+1-2)=0\Rightarrow 2-2\lambda=0\Rightarrow 2\lambda=2\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow$$

$$x-2y+z+1\cdot(-x-2y+z-2)=0\Rightarrow x-2y+z-x-2y+z-2=0\Rightarrow\pi\equiv 4y-2z+2=0$$

b) El vector director de la recta **s** es el mismo que el de **r**, el punto **P** la define

$$r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x-2y+z=2 \end{cases}\Rightarrow -4y+2z=2\Rightarrow -2y+z=1\Rightarrow z=1+2y\Rightarrow x-2y+1+2y=0\Rightarrow x=-1$$

$$\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}=(0\,,1\,,2)\Rightarrow\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{2}\Rightarrow\begin{cases} 2\cdot(x-1)=0 \\ 2y=z-1 \end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$$

OPCIÓN B

1..- a) Determinar los valores de ***a***, ***b*** y ***c*** sabiendo que la función ***f (x) = x³ +ax² +bx + c*** tiene extremos relativos en ***x = 1*** y ***x = -3***, y que corta a su función derivada en ***x = 0***. Determinar asimismo la naturaleza de los extremos. **(1,25 puntos)**

b) Calcular el límite: $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1}$ **(1,25 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow 2a+b=-3 \\ f'(-3)=0 \Rightarrow 3\cdot(-3)^2+2a\cdot(-3)+b=0 \Rightarrow -27-6a+b=0 \Rightarrow -6a+b=27 \\ f(0)=f'(0) \Rightarrow 0^3+a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b \Rightarrow c=b \end{cases}$$

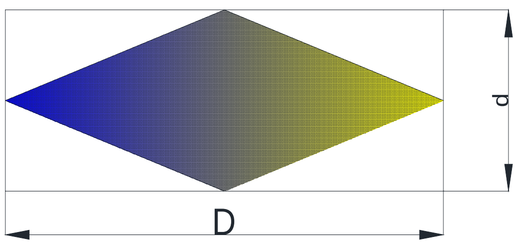
$$\begin{cases} 6a+3b=-9 \\ -6a+b=27 \end{cases} \Rightarrow 4b=18 \Rightarrow b=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=c \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-3 \\ 6a-b=-27 \end{cases} \Rightarrow 8a=-30 \Rightarrow a=-\frac{30}{8}=-\frac{15}{4} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (a\ ,\ b\ ,\ c)=\left(-\frac{15}{4}\ ,\ \frac{9}{2}\ ,\ \frac{9}{2}\right)$$

$b)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{2\cdot 2-3}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{2\cdot 2-3}}{2\sqrt{2+2}}=\frac{\sqrt{4-3}}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

2.- La figura siguiente muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima. (2,5 puntos)



$$\begin{cases} 100=2D+2d \Rightarrow D+d=50 \Rightarrow D=50-d \\ S=\frac{Dd}{2} \end{cases} \Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot(50-d)\,d=\frac{1}{2}\cdot\left(50d-d^2\right)\Rightarrow$$

$$S'=\frac{dS}{dd}=\frac{1}{2}\cdot(50-2d)=\frac{2}{2}\cdot(25-d)=25-d \Rightarrow S'=0 \Rightarrow 25-d=0 \Rightarrow d=25 \Rightarrow$$

$$S''=\frac{d^2S}{dd^2}=-1<0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow \begin{cases} d=25\ m \\ D=50-25=25\ m \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calcular las matrices *A* y *B* tales que: $\begin{cases} 5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$ **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} 15A+9B=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} \\ -15A-10B=(-5)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -45 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 9B-10B=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -45 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$-B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10A+6B=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} \\ -9A-6B=(-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 10A-9A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Dada la recta: $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos ***P* (1 , -2 , 0)** y ***Q*(0 , 1 , 3)**

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a ***r*** y es paralelo a ***PQ***. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la ecuación de la recta ***s*** perpendicular a ***r*** que pasa por ***Q*** e intersecta a ***r***.
(1,25 puntos)

a) El plano π queda determinado por el vector director de la recta r, el vector **PQ** al que es paralelo y por el vector **RG**, siendo **G** el punto genérico del plano y **R** uno cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación). Como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} x=z\Rightarrow z-2y+z=0\Rightarrow 2z-2y=0\Rightarrow y=z\Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ R(0,0,0) \end{cases} \\ \overrightarrow{PQ}=(0,1,3)-(1,-2,0)=(-1,3,3) \\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(0,0,0) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$3x-y+3z+z-3x-3y=0\Rightarrow 4y-4z=0\Rightarrow \pi\equiv y-z=0$$

b) El vector director de la recta **r** y el vector **QR_1,** donde **R_1** es el valor genérico de la recta **r,** son perpendiculares y su producto escalar es nulo. El punto de corte **R_2** resultante y el vector **QR_1**, que es el vector director de la recta **s**, definirán a dicha recta

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{QR_1} = (\lambda\,,\lambda\,,\lambda) - (0\,,1\,,3) = (\lambda\,,\lambda-1\,,\lambda-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{QR_1} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{QR_1} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,1\,,1)\cdot(\lambda\,,\lambda-1\,,\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda+\lambda-1+\lambda-3 = 0 \Rightarrow 3\lambda-4=0 \Rightarrow 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} R_2\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \\ \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{QR_1} = \left(\frac{4}{3}\,,\frac{4}{3}-1\,,\frac{4}{3}-3\right) = \left(\frac{4}{3}\,,\frac{1}{3}\,,-\frac{5}{3}\right) \equiv (4\,,1\,,-5) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3}+4\mu \\ y = \frac{4}{3}+\mu \\ z = \frac{4}{3}-5\mu \end{cases}$$